

Optische Resonatoren

Matthias Pospiech

Universität Hannover

Inhalt

1.  **Grundlagen**
2. Stabilitätskriterien
3. Transversale Moden
4. Longitudinale Moden
5. Experiment

Aufbau von Resonatoren

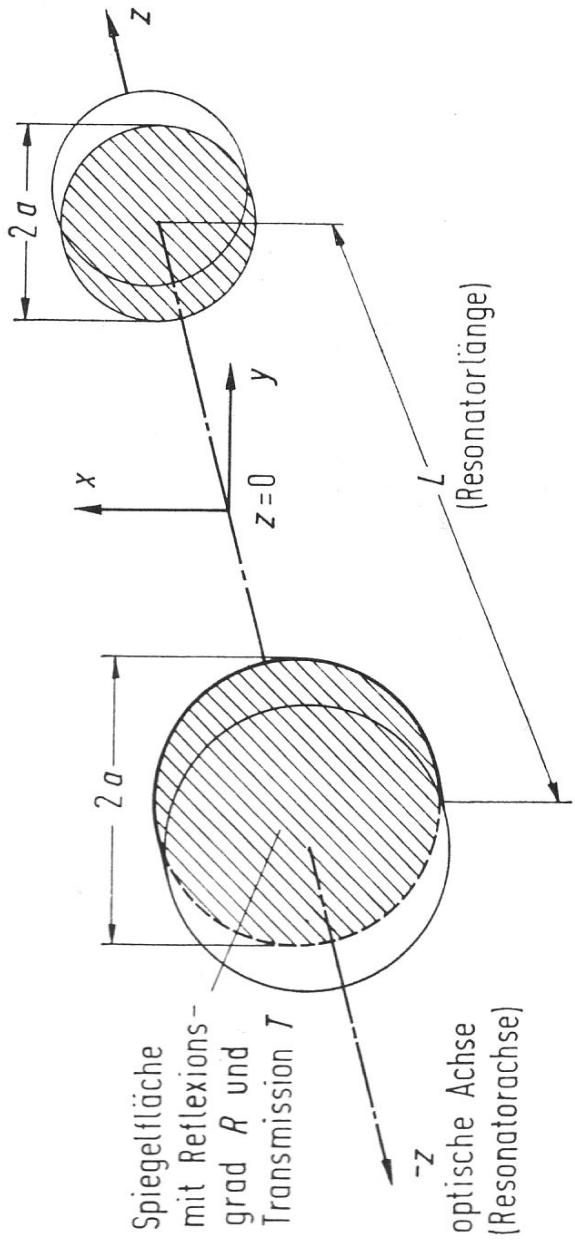


Abbildung 1: Grundaufbau eines Resonators

Bezeichnungen:

- Länge des Resonators: L
- Krümmungsradien der Spiegel: $R_{1,2}$
- Durchmesser der Spiegel: $2a$.
- Reflektivitäten: $\mathcal{R}_{1,2}$

Resonatortypen

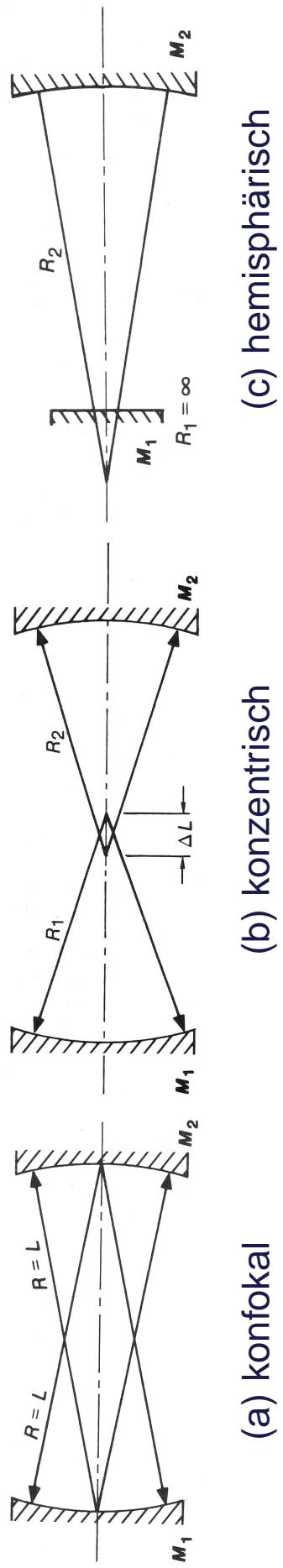


Abbildung 2: Verschiedene Typen von Resonatoren

Verhältnis von Resonatorlänge zu Spiegelradien

- konfokal (sym.): $R_1 = R_2 = L$
- konzentrisch (sym.): $R_1 = R_2 = 1/2L$
- hemisphärisch: $R_1 = \infty$, $R_2 = R$, $L < R$
- planparallel: $R = \infty$

Verluste im Resonator

Verluste durch

- Transmission an den Spiegeln
- Beugung an den Grenzflächen
- Absorption in dem Medium
- Lichtstreuung

Inhalt

1. Grundlagen
2.  **Stabilitätskriterien**
3. Transversale Moden
4. Longitudinale Moden
5. Experiment

Optisch Stabil

- **optisch stabil:** paraxialer Lichtstrahl verlässt den Resonator auch nach beliebig vielen Reflexionen an den Spiegeln nicht.
- **Strahlen-Optik:** keine Strahlenverluste (Annahme: perfekte Spiegel)
- aber: zusätzliche Beugungsverluste

Optisch Stabil

- **optisch stabil:** paraxialer Lichtstrahl verlässt den Resonator auch nach beliebig vielen Reflexionen an den Spiegeln nicht.
 - **Strahlen-Optik:** keine Strahlenverluste (Annahme: perfekte Spiegel)
 - aber: zusätzliche Beugungsverluste
- Herleitung der **Stabilitätskriterien** mittels der **Strahlen-Optik**.
- (Herleitung über Gaußoptik z. B. in *Laserspektroskopie* von Demtröder)

Strahlenoptik

paraxiale Näherung: Steigung $r' = \tan(\alpha)$ sehr klein $\Rightarrow r' \approx \alpha$.

Strahlenvektor:

$$\mathbf{r}(z) = \begin{pmatrix} r(z) \\ r'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(z) \\ \alpha \end{pmatrix}$$

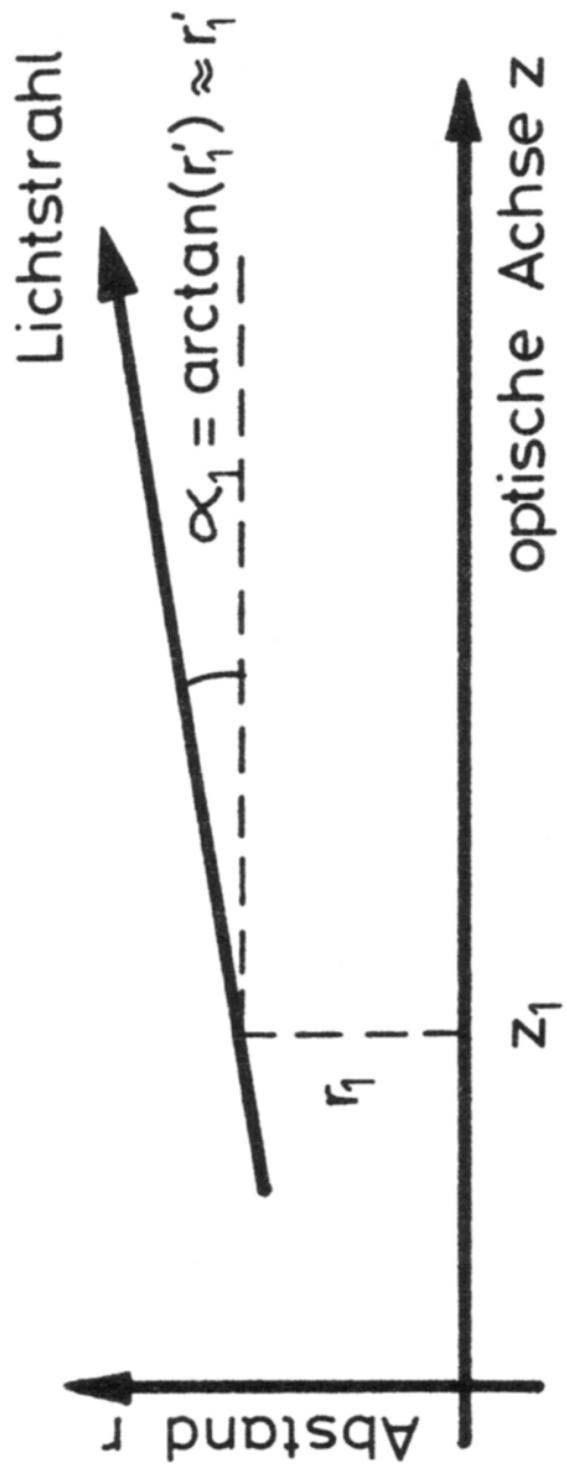


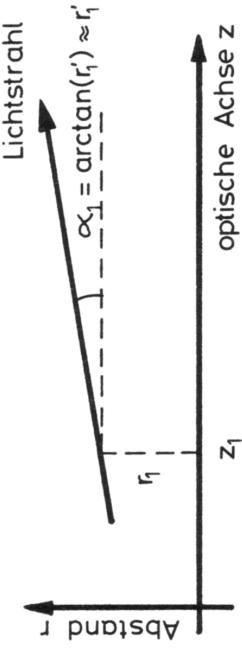
Abbildung 3: Paraxialer strahl

Strahlenoptik: Optische Elemente

Optischen Elemente lassen sich durch zweidimensionale Matrizen \mathcal{M} darstellen:

$$\mathbf{r}_2 = \mathcal{M} \mathbf{r}_1$$

Ausbreitung durch mehrere optische Elemente



$$\mathbf{r}_2 = \mathcal{M}_n \cdots \mathcal{M}_1 \mathbf{r}_1$$

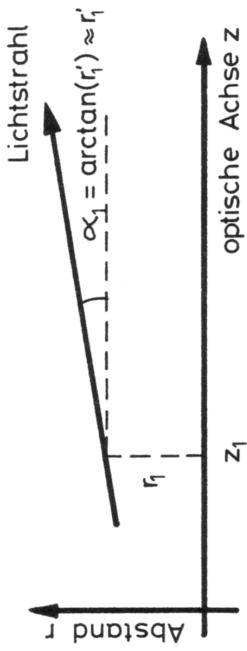
Strahlenoptik: Optische Elemente

Optischen Elemente lassen sich durch zweidimensionale Matrizen \mathcal{M} darstellen:

$$\mathbf{r}_2 = \mathcal{M} \mathbf{r}_1$$

Ausbreitung durch mehrere optische Elemente

$$\mathbf{r}_2 = \mathcal{M}_n \cdots \mathcal{M}_1 \mathbf{r}_1$$



Beispiele für \mathcal{M} :

Ungestörte Ausbreitung

$$\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$$

Dünne Linse

Sphärischer Spiegel

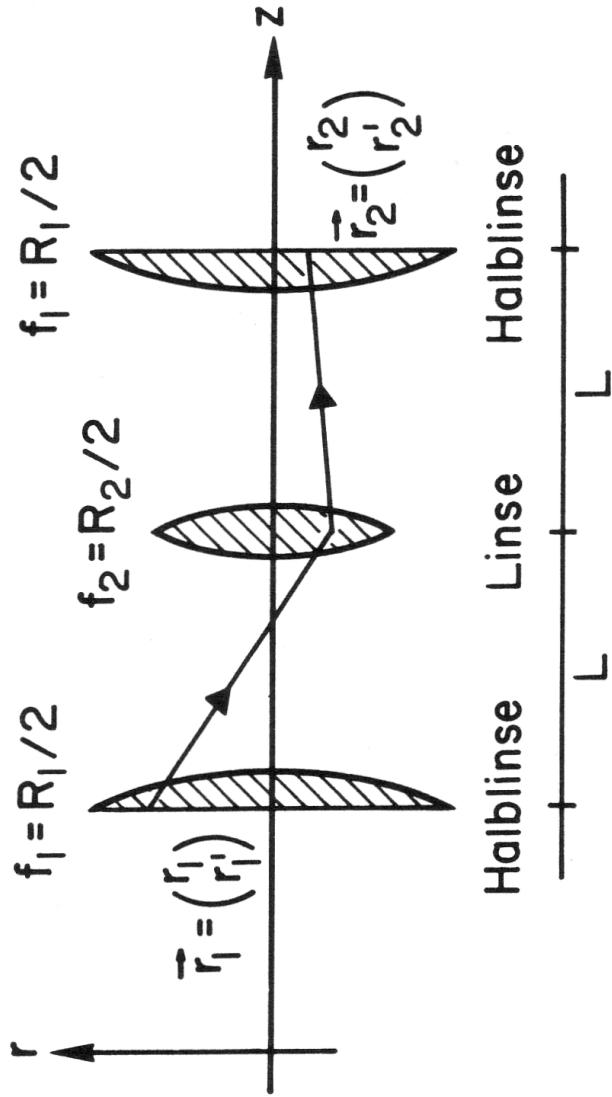
⇒ Sphärischer Spiegel und dünne Linse sind äquivalente optische Elemente.

Herleitung: Stabilitätskriterien

Wir betrachten einen vollständigen „round-trip“ im Resonator und stellen diesen über Linsen dar. Die gesamte Transformation ist dann:

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2f_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ -1/2f_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{r}_1$$

[Halblinse] · [freier Raum] · [Linse] · [freier Raum] · [Halblinse]



Herleitung: Stabilitätskriterien

Resonatorparameter g_1 und g_2 :

$$g_i = 1 - \frac{L}{R_i} = 1 - \frac{L}{2f_i}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} (2g_1g_2 - 1) & 2g_2L \\ 2g_1(g_1g_2 - 1)/L & (2g_1g_2 - 1) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{r}_2$$

Bedingung:

n -ten Strahldurchlauf

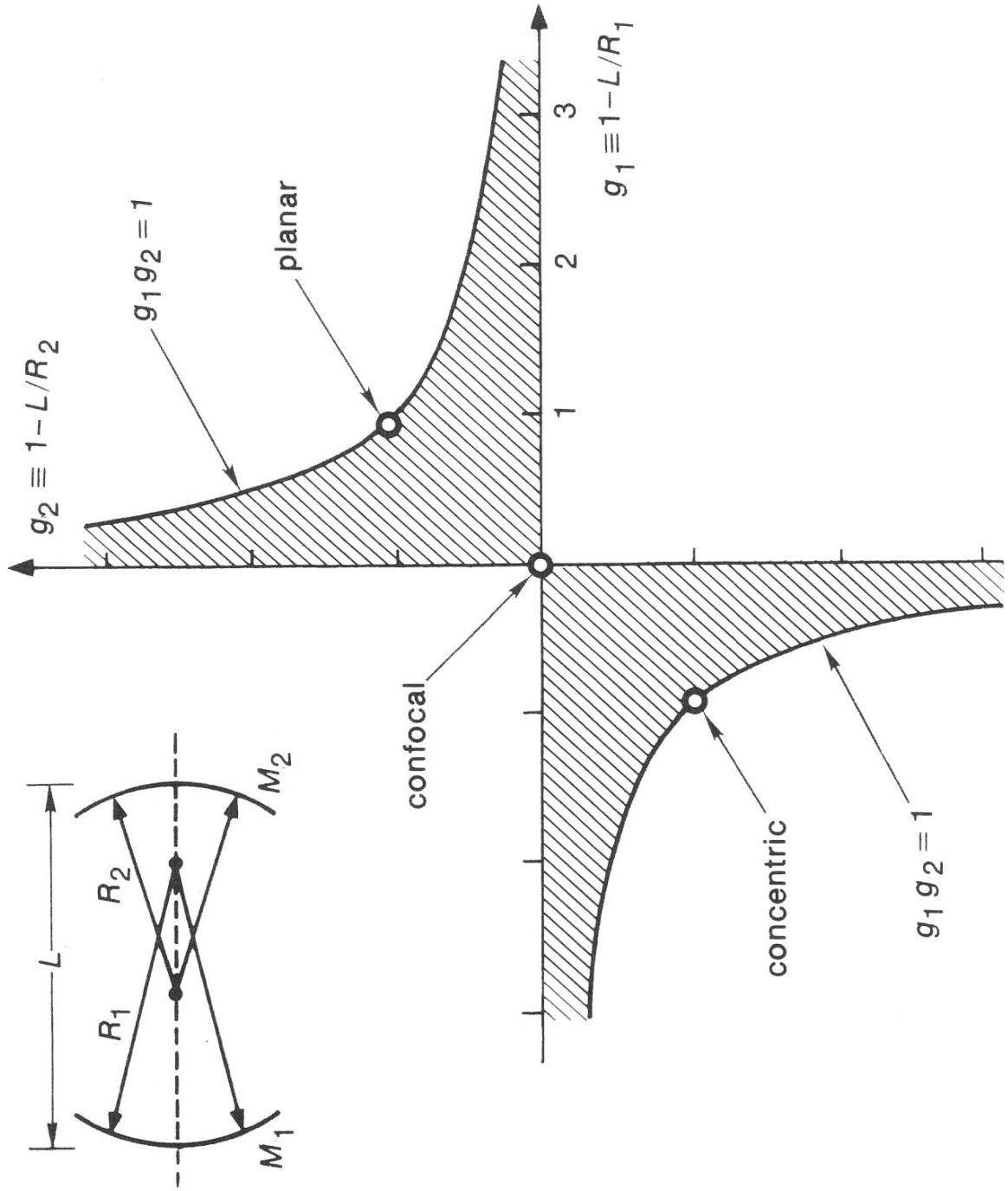
$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathcal{M}^n \mathbf{r}_1$$

liegt noch im Resonator

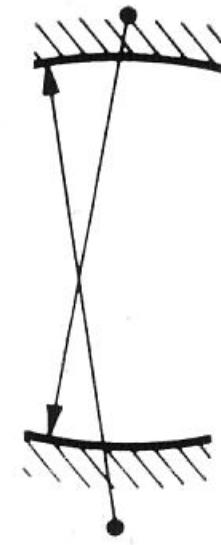
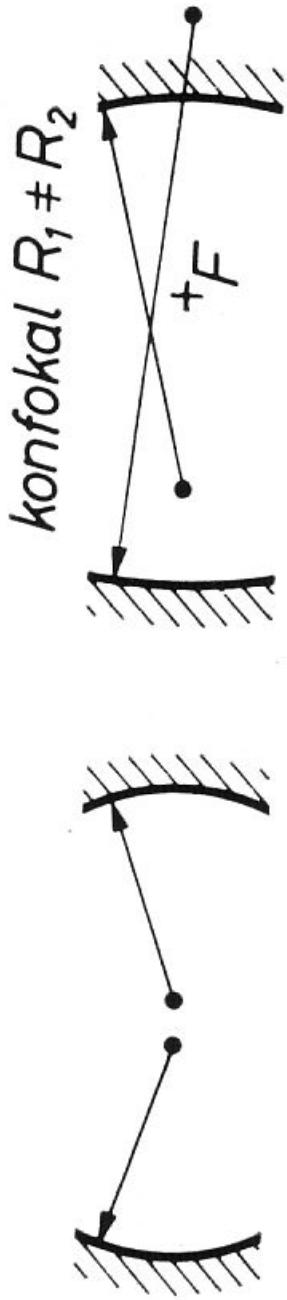
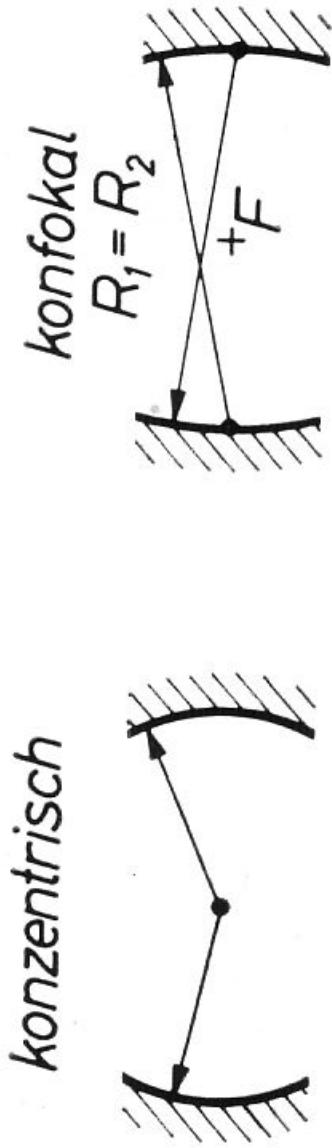
⇒ *Stabilitätskriterium*

$$0 < g_1g_2 < 1$$

Stabilitätsdiagramm



Beispiele: Stabile und instabile Resonatoren



Inhalt

1. Grundlagen
2. Stabilitätskriterien
3.  **Transversale Moden**
4. Longitudinale Moden
5. Experiment

Transversale Moden

Moden

- transversale Moden: Intensitätsverteilung senkrecht zur Achse des Resonators
- longitudinale Moden: Intensitätsverteilung in Achsenrichtung.

Transversale Moden

Moden

- transversale Moden: Intensitätsverteilung senkrecht zur Achse des Resonators
- longitudinale Moden: Intensitätsverteilung in Achsenrichtung.

Bedingung für transversale Moden

- Feldverteilung im Resonator durch eine Überlagerung aller hind und zurücklaufenden Wellen.
- zur Ausbildung von Moden : stationäre Feldverteilung

Stationäre Feldverteilung : Bei Reflexion ändert sich die räumliche Feldverteilung über dem Querschnitt des Resonators nicht. (Feld reproduziert sich bei Reflexion).

Gaußmoden

Die Gaußmoden sind Lösung der *Helmholtzgleichung* in paraxialer Näherung:

$$(mit \varrho^2 = x^2 + y^2)$$

$$\nabla_{\varrho}^2 u - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{Helmholtzgleichung}$$

Symmetrien

- Zylinderkoordinaten (kreisförmige Spiegel) \rightarrow *Laguerre-Gauss Moden*
- kartesische Koordinaten (rechteckige Spiegel) \rightarrow *Hermite-Gauss Moden*

Höhere Moden: Hermite-Gauss Moden

Feldverteilung der Hermite-Gauss Moden

$$A_{mn} = H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}} e^{-i\varphi(x,y,z)}$$

H_m, H_n : Hermitesche Polynome.

Parameter n, m : Anzahl der Nullstellen in x und y Richtung

Höhere Moden: Hermite-Gauss Moden

Feldverteilung der Hermite-Gauss Moden

$$A_{mn} = H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}} e^{-i\varphi(x,y,z)}$$

H_m, H_n : Hermitesche Polynome.

Parameter n, m : Anzahl der Nullstellen in x und y Richtung

Grundmode

$$u(r) = \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[- \left(\frac{\varrho}{w(z)} \right)^2 \right] \cdot \exp \left[ik \frac{\varrho^2}{2R(z)} \right] \cdot \exp [i(kz - \varphi(z))]$$

Die Grundmode TEM₀₀ bezeichnet man auch als Gaußmode

Hermite-Gauss Moden

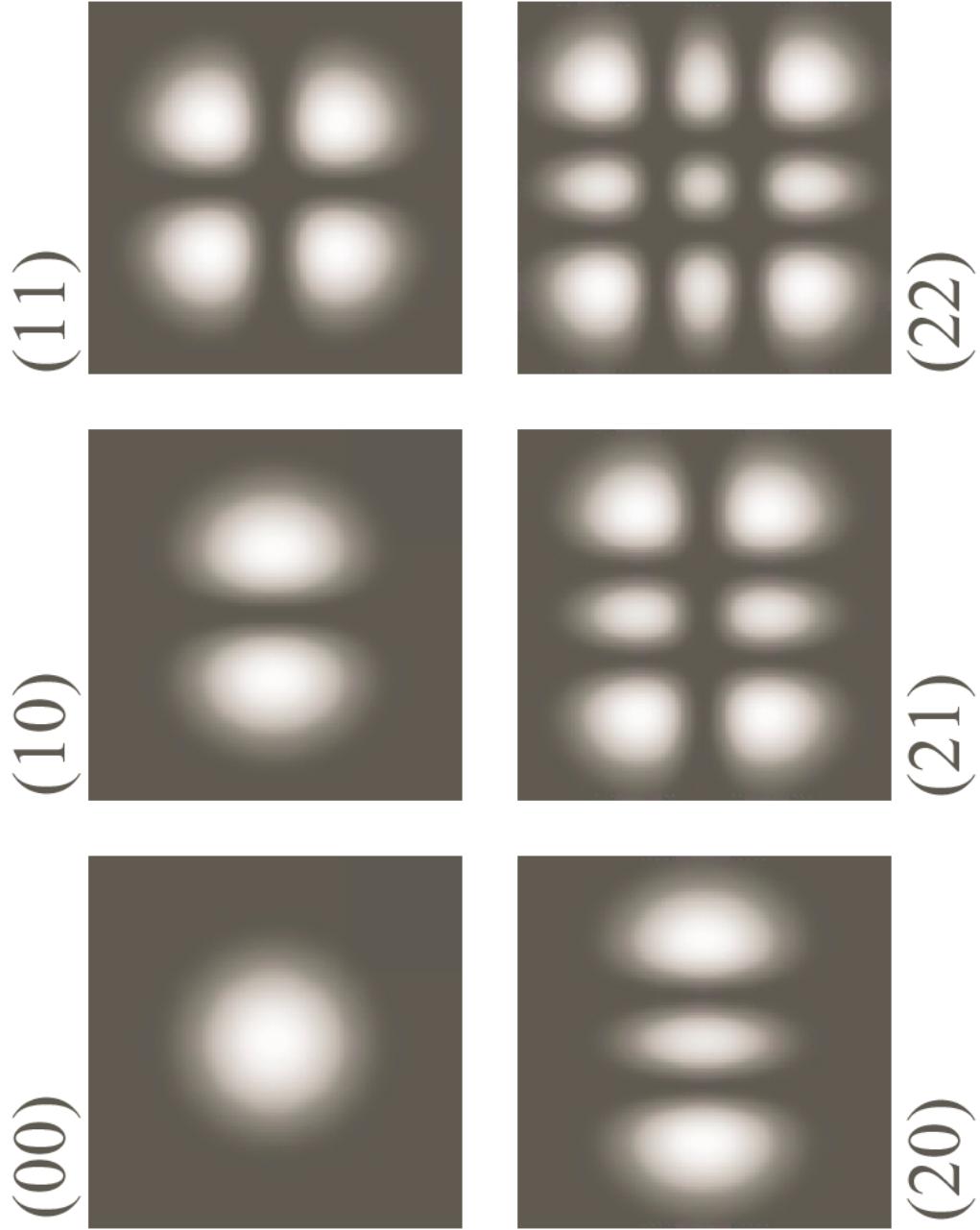


Abbildung 4: Hermite-Gauss Moden TEM_{mn}

Laguerre-Gauss Moden

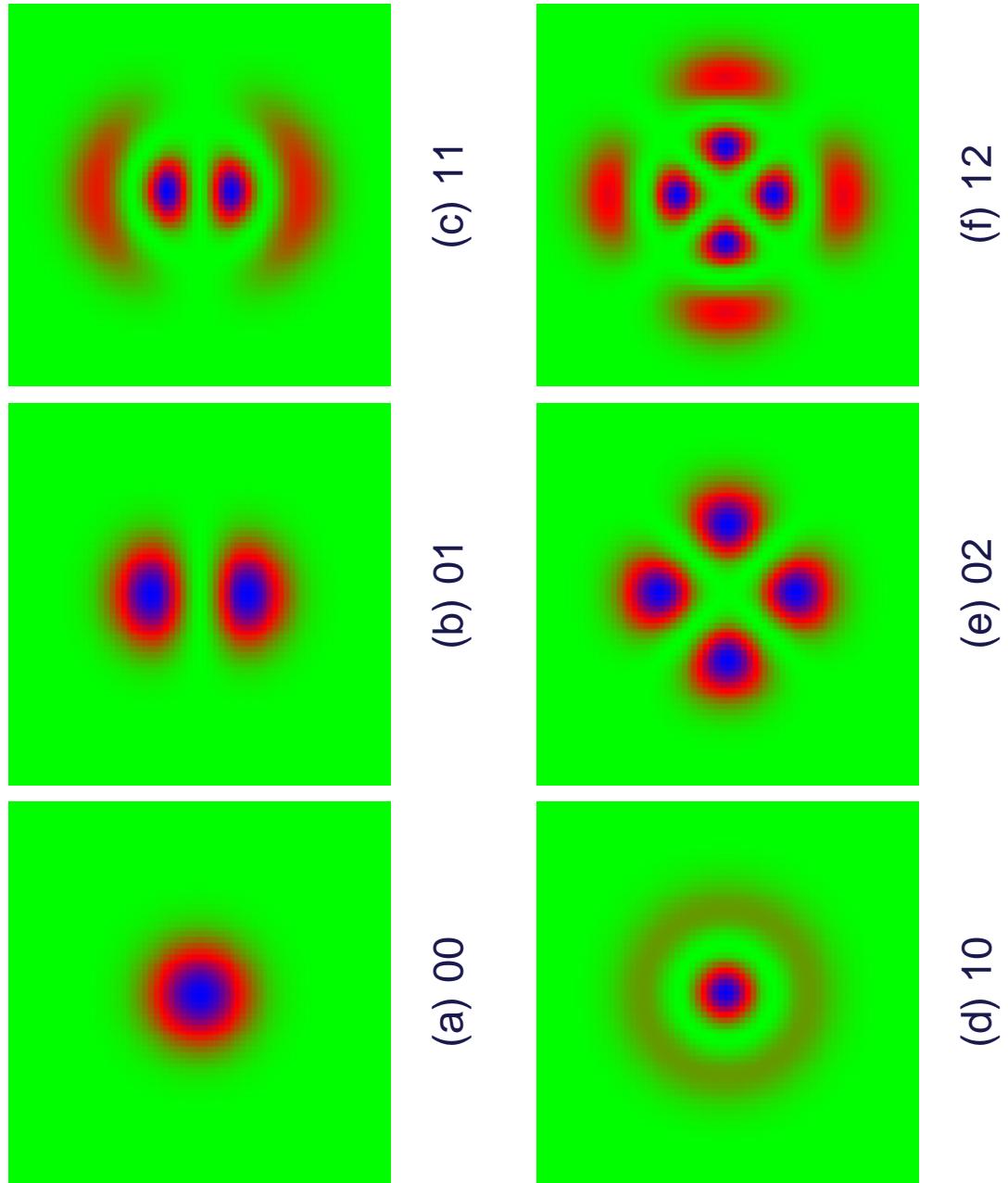


Abbildung 5: Laguerre-Gauss Moden TEM_{pq}

Inhalt

1. Grundlagen
2. Stabilitätskriterien
3. Transversale Moden
4.  **Longitudinale Moden**
5. Experiment

Bedingung für Longitudinale Moden

- stehende Wellen im Resonator \rightarrow Eigenfrequenzen ν_{mnq}
abhängig von

- transversaler Mode (m, n)
- Länge des Resonators (q)

Modenbezeichnung: TEM_{mnq}

Bedingung für Longitudinale Moden

- stehende Wellen im Resonator \rightarrow Eigenfrequenzen ν_{mnq} abhängig von

- transversaler Mode (m, n)
- Länge des Resonators (q)

Modenbezeichnung: TEM_{mnq}

Planparalleler Resonator (FPI)

Länge L des Resonators ist ein ganzzahliges Vielfaches q der halben Wellenlänge:

$$L = \frac{\lambda}{2} q \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{c}{2L} q$$

Resonanzfrequenzen

Resonanzfrequenzen für beliebige Spiegel:

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L} [q + (m + n + 1) \cdot F(g_1, g_2)] \quad q : \text{ganzzahlig}$$

Resonanzfrequenzen

Resonanzfrequenzen für beliebige Spiegel:

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L} [q + (m + n + 1) \cdot F(g_1, g_2)] \quad q : \text{ganzzahlig}$$

Der Faktor $F(g_1, g_2)$ ist gegeben durch

$$F(g_1, g_2) = \frac{1}{\pi} \cdot \cos^{-1} \sqrt{g_1 g_2} = \begin{cases} 0 & \text{für den planparallelten Resonator} \\ 1/2 & \text{für den konfokalen Resonator} \\ 1 & \text{für den konzentrischen Resonator} \end{cases}$$

Resonanzfrequenzen

Resonanzfrequenzen für beliebige Spiegel:

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L} [q + (m + n + 1) \cdot F(g_1, g_2)] \quad q : \text{ganzzahlig}$$

Der Faktor $F(g_1, g_2)$ ist gegeben durch

$$F(g_1, g_2) = \frac{1}{\pi} \cdot \cos^{-1} \sqrt{g_1 g_2} = \begin{cases} 0 & \text{für den planparallelten Resonator} \\ 1/2 & \text{für den konfokalen Resonator} \\ 1 & \text{für den konzentrischen Resonator} \end{cases}$$

Spiegelabstand für den konfokalen Resonator

$$L = \frac{\lambda}{2} \left[q + \frac{1}{2}(m + n + 1) \right]$$

Freier Spektralbereich (FSR) (konfokal)

Freier Spektralbereich: $\delta\nu$ bezeichnet den Frequenzabstand zwischen zwei Moden.

Für transversale Moden beträgt dieser: ($\Delta(m+n) = 1$): $\delta\nu = \frac{c}{4d}$

und für longitudinale Moden: ($\Delta(q) = 1$): $\delta\nu = \frac{c}{2d}$

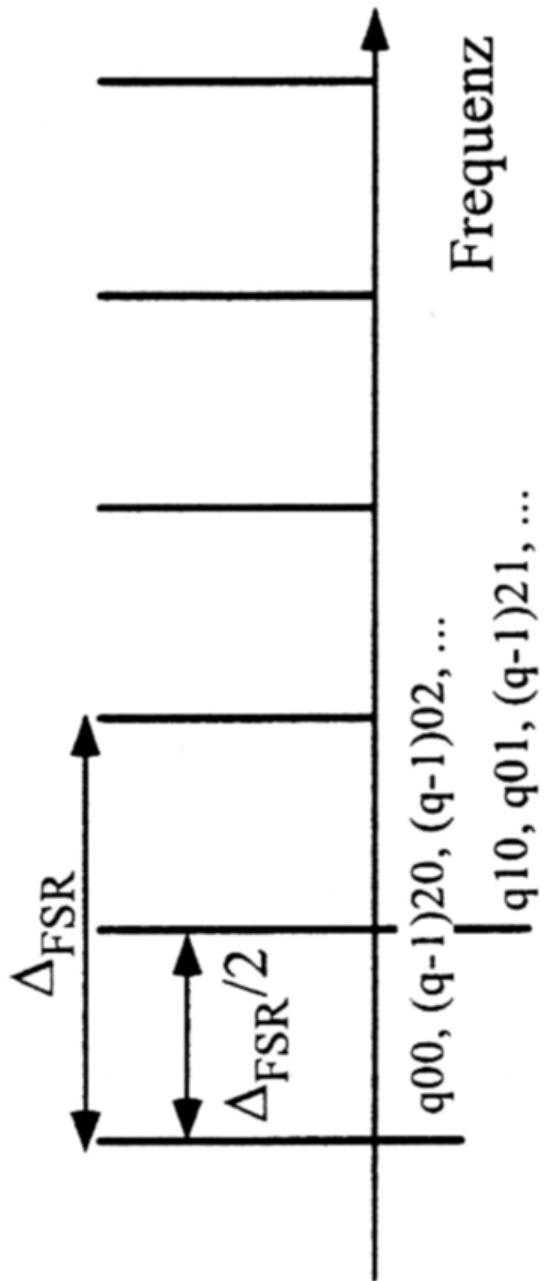


Abbildung 6: Resonanzfrequenzen des konfokalen Resonator

Resonanzkennlinie

Verluste im Resonator \Rightarrow Resonanzkennlinie nicht beliebig scharf

Hallbwertsbreite: Frequenzdifferenz $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$ der Frequenzen, für die die Intensität auf die Hälfte abgesunken ist

$$I_T(\nu_1) = I_T(\nu_2) = \frac{1}{2} I_T(\nu_m).$$

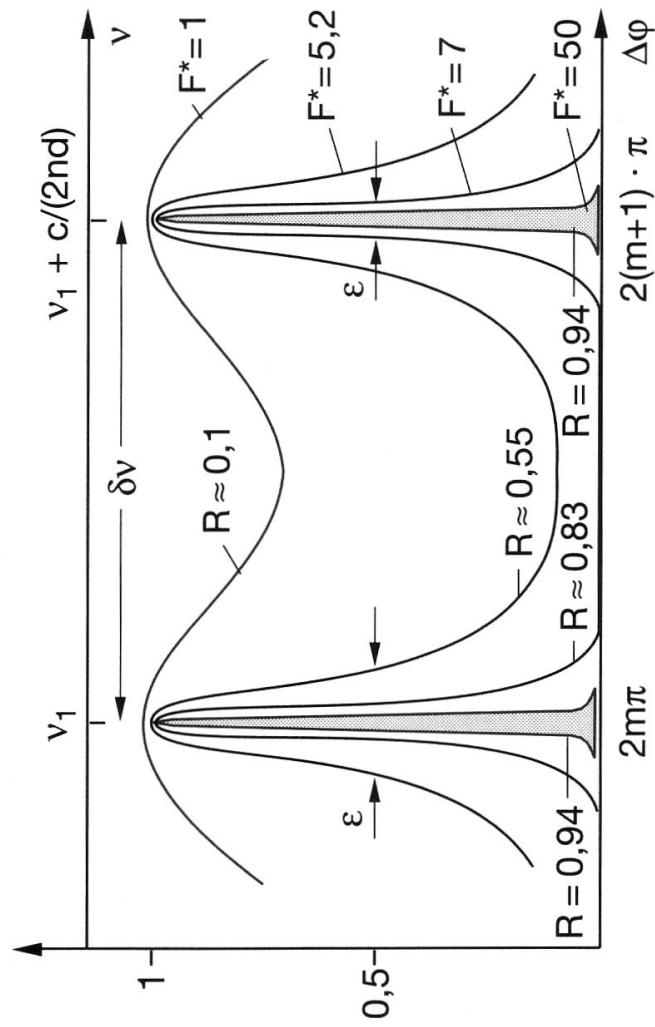
Überwiegen die Verluste durch die Transmission der Spiegel, so ergibt sich analog zum Fabry-Perot Interferometer eine Halbwertsbreite von:

$$\boxed{\Delta\nu = \frac{\delta\nu}{\mathcal{F}}}$$

Die Finesse \mathcal{F} ist gegeben durch

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{\mathcal{R}}}{1-\mathcal{R}}$$

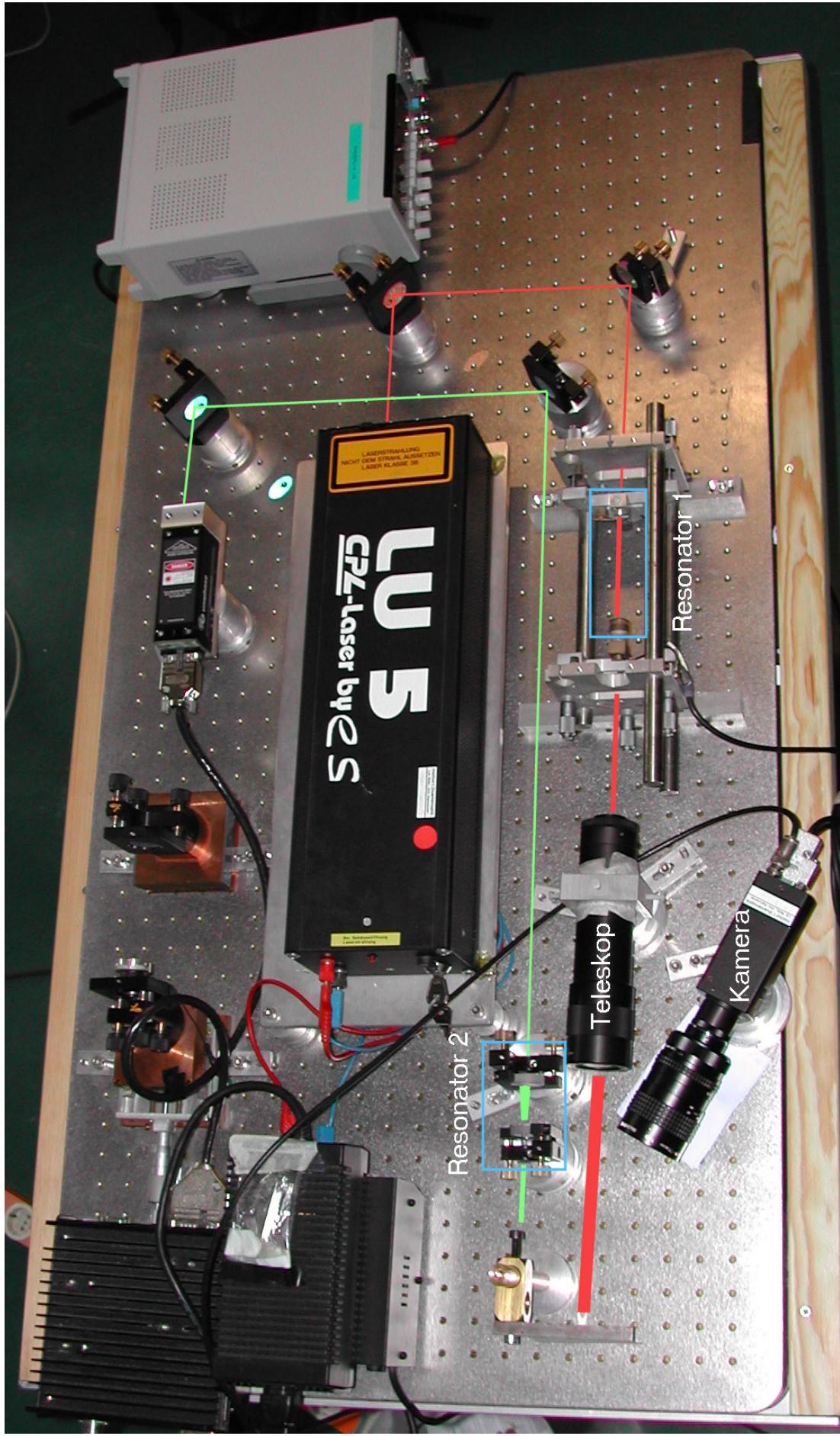
mit der Reflektivität \mathcal{R} .



Inhalt

1. Grundlagen
2. Stabilitätskriterien
3. Transversale Moden
4. Longitudinale Moden
5.  **Experiment**

Aufbau des Experiments mit Strahlengängen



Maximalen Länge des hemisphärischen Resonators

Wir wissen: planparallele Platte: $R = \infty$

$$g_1 = 1 - L/\infty = 1$$

$$g_2 = 1 - L/R$$

stabil für $g_1 g_2 > 0$

$$g_1 g_2 = 1 - L/R > 0$$

$$\Rightarrow L < R$$

Unser Spiegel hat eine Krümmungsradius von $R = 75\text{mm}$

$$\Rightarrow L < 75\text{mm}$$

Berechnung der Halbwertsbreite

Reflektivitäten: $\mathcal{R}_1 = 0,999$ $\mathcal{R}_2 = 0,98$

Freier Spektralbereich:

$$\delta\nu = \frac{c}{2L} = \frac{c}{2 \cdot 75\text{mm}} = 2\text{GHz}$$

Gesamtreflektivität:

$$\mathcal{R} = \sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} = \sqrt{0,999 \cdot 0,98} \approx 0,989$$

Finesse

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{\mathcal{R}}}{1 - \mathcal{R}} \approx 296$$

Halbwertsbreite:

$$\Rightarrow \Delta\nu = \frac{\delta\nu}{\mathcal{F}} = \frac{2 \cdot 10^9}{296} \approx 6,7\text{MHz}$$

Inhalt

1. Grundlagen
2. Stabilitätskriterien
3. Transversale Moden
4. Longitudinale Moden
5. Experiment
6. ... **Fragen ?**

Anhang

Beispiele: Tabelle

Resonatortyp	Spiegelradien	Parameter
konfokal	$R_1 + R_2 = 2L$	$g_1 + g_2 = 2g_1g_2$
konzentrisch	$R_1 + R_2 = L$	$g_1 \cdot g_2 = 1$
symmetrisch	$R_1 = R_2$	$g_1 = g_2$
konfokal symmetrisch	$R_1 = R_2 = L$	$g_1 = g_2 = 0$
konzentrisch symmetrisch	$R_1 = R_2 = 1/2L$	$g_1 = g_2 = -1$
eben	$b_1 = b_2 = \infty$	$g_1 = g_2 = +1$

Tabelle 1: Resonatoren mit ihren Stabilitätsparametern

Resonatorparameter:

$$g = 1 - L/R$$

Berechnung der Modenstruktur

Ersetze Resonator mit zwei Spiegeln durch eine äquivalente Anordnung von Lochblenden

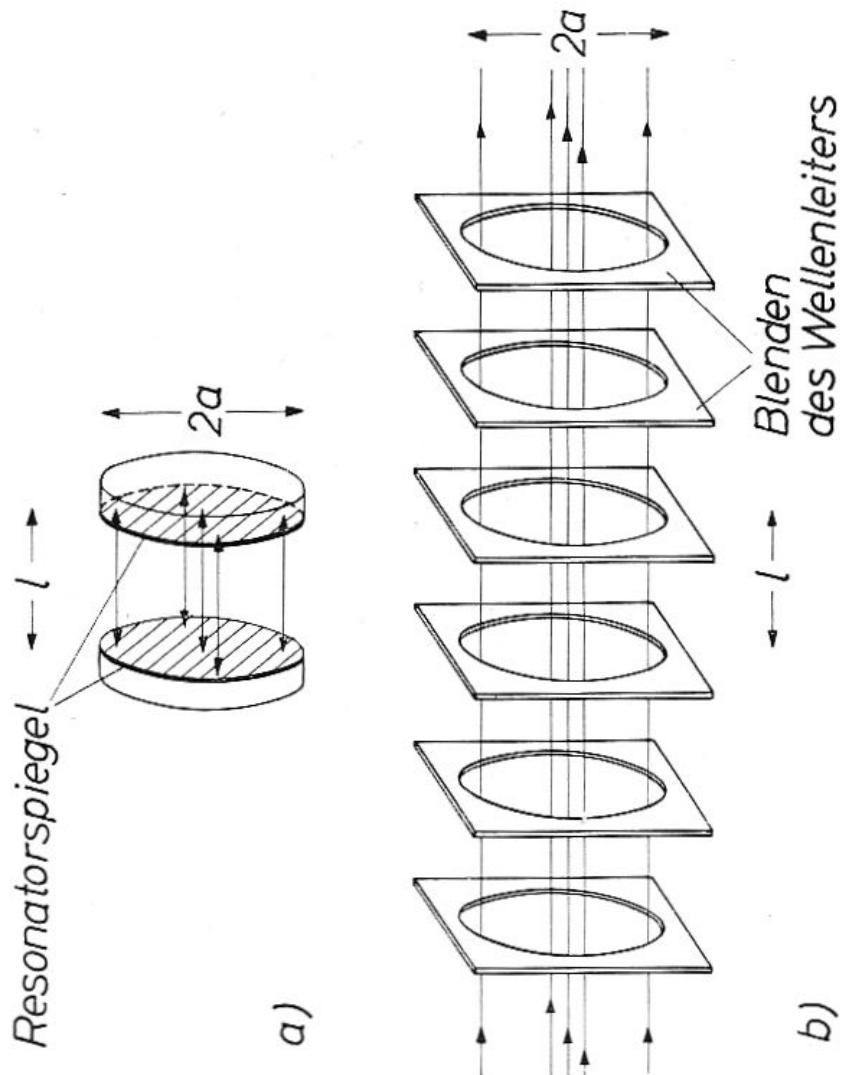
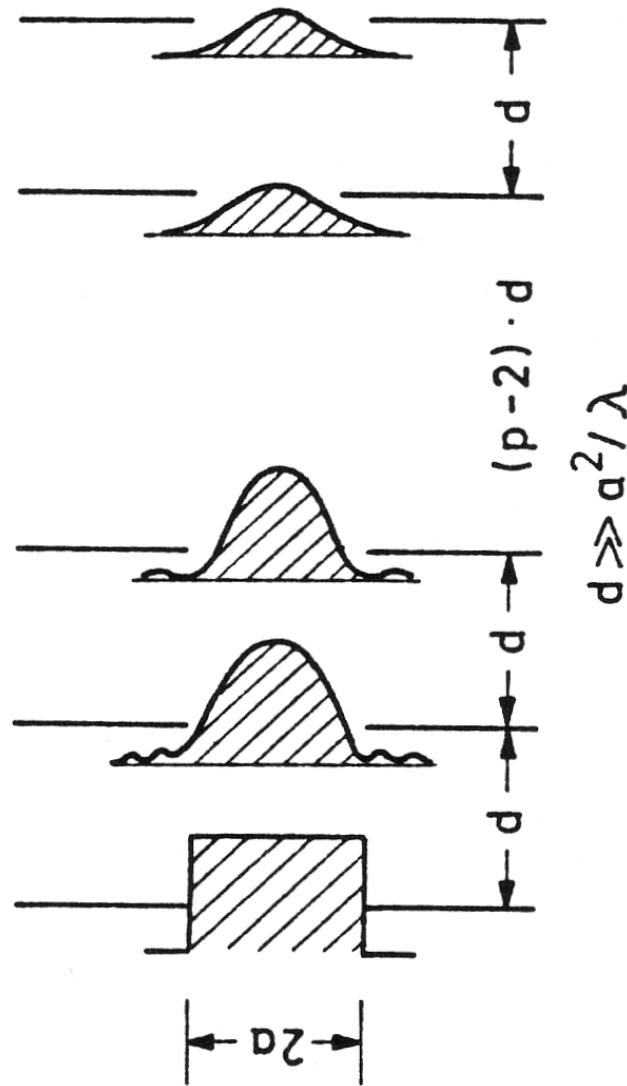


Abbildung 7: Äquivalente Anordnung von Lochblenden

Berechnung der Modenstruktur

Intensitätsverteilung ändert sich beim Durchgang durch jede Blende



$$d \gg a^2 / \lambda$$

äquivalentes Blendsystem

Abbildung 8: Veränderung der Feldverteilung der Lochblenden

$(n - 1)$ -ten Blende bestimmt Intensitätsverteilung der n -ten Blende

Berechnung der Modenstruktur

Eine stationäre Feldverteilung muss gelten

$$A_n(x, y) = C A_{n-1}(x, y)$$

(wobei $|C|^2$ den Intensitätsverlust der Beugung angibt.)

Berechne Feldverteilung $A_n(x, y)$ iterativ über das *Fresnelsche Integral*:

$$A_n(x, y) = -\frac{i}{2\lambda} \iint A_{n-1}(x', y') \frac{1}{\varrho} e^{-ik\varrho} (1 + \cos \vartheta) dx' dy'$$

Berechnung der Modenstruktur

Eine stationäre Feldverteilung muss gelten

$$A_n(x, y) = C A_{n-1}(x, y)$$

(wobei $|C|^2$ den Intensitätsverlust der Beugung angibt.)

Berechne Feldverteilung $A_n(x, y)$ iterativ über das *Fresnelsche Integral*:

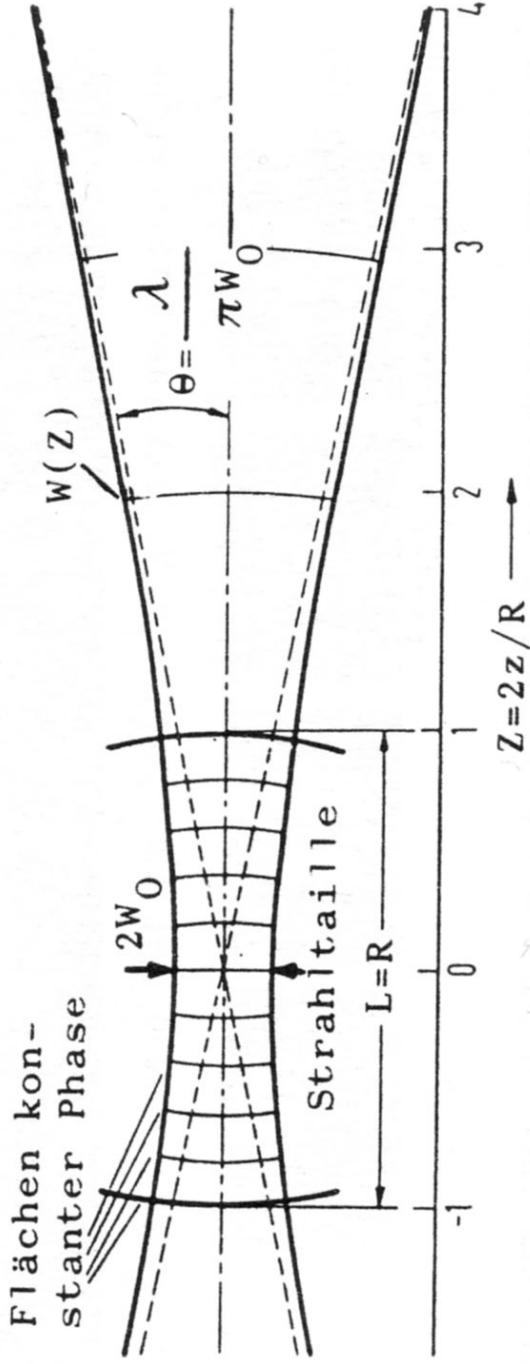
$$A_n(x, y) = -\frac{i}{2\lambda} \iint A_{n-1}(x', y') \frac{1}{\varrho} e^{-ik\varrho} (1 + \cos \vartheta) dx' dy'$$

Lösungen

(nur für den konfokalen Resonator: $R_1 = R_2 = L$)

⇒ **Hermite-Gauß** bzw. **Laguerre-Gauß Moden**

Parameter der Gaußmode



Strahlparameter

$$q = z - z_0$$

Strahltrappe (beam waist) $w^2(z) = w_0^2 [1 + (z/z_0)^2]$, $w_0^2 = \lambda z_0 / \pi$

Krümmungsradius

$$R(z) = [1 + (z_0/z)^2]$$

Gouy Phase

$$\varphi = \tan^{-1}(z/z_0)$$

Rayleigh Zone

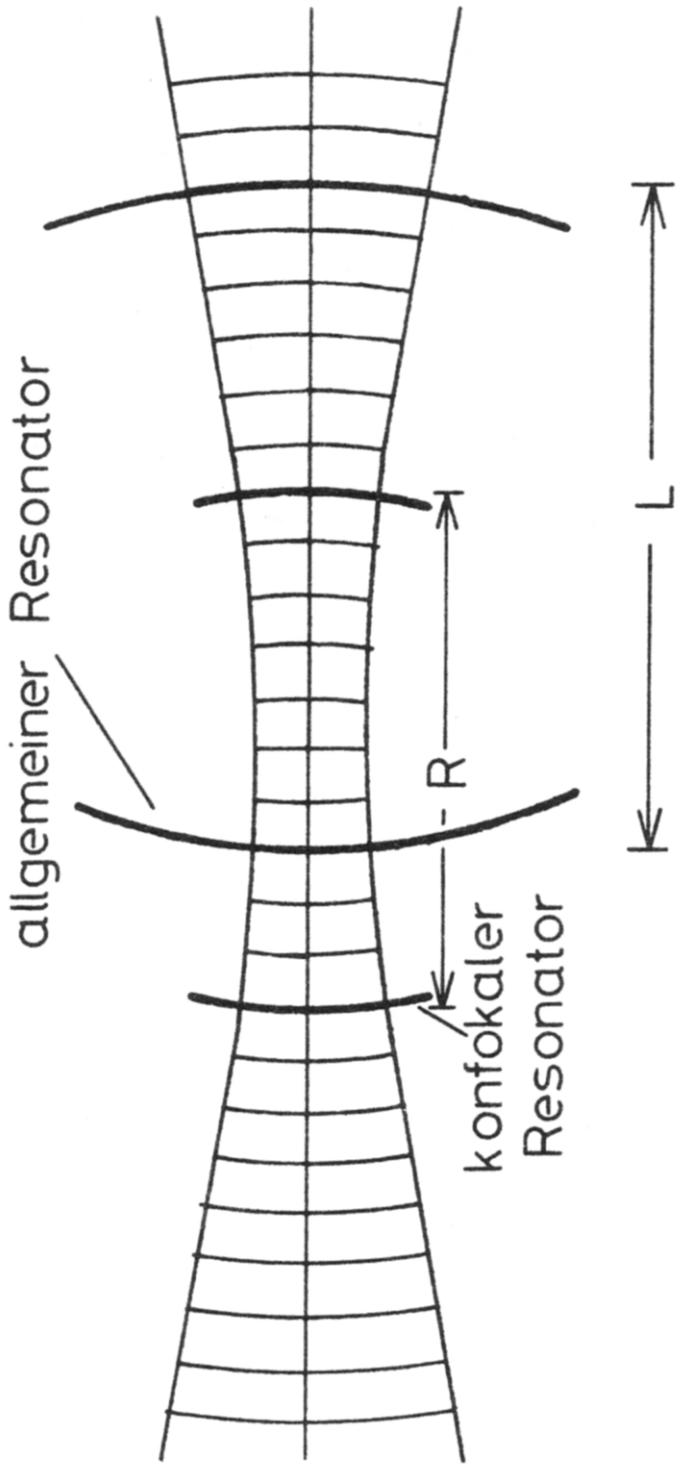
$$b = 2z_0$$

Divergenz Winkel

$$\Theta \approx w_0/z_0 = \lambda/\pi w_0$$

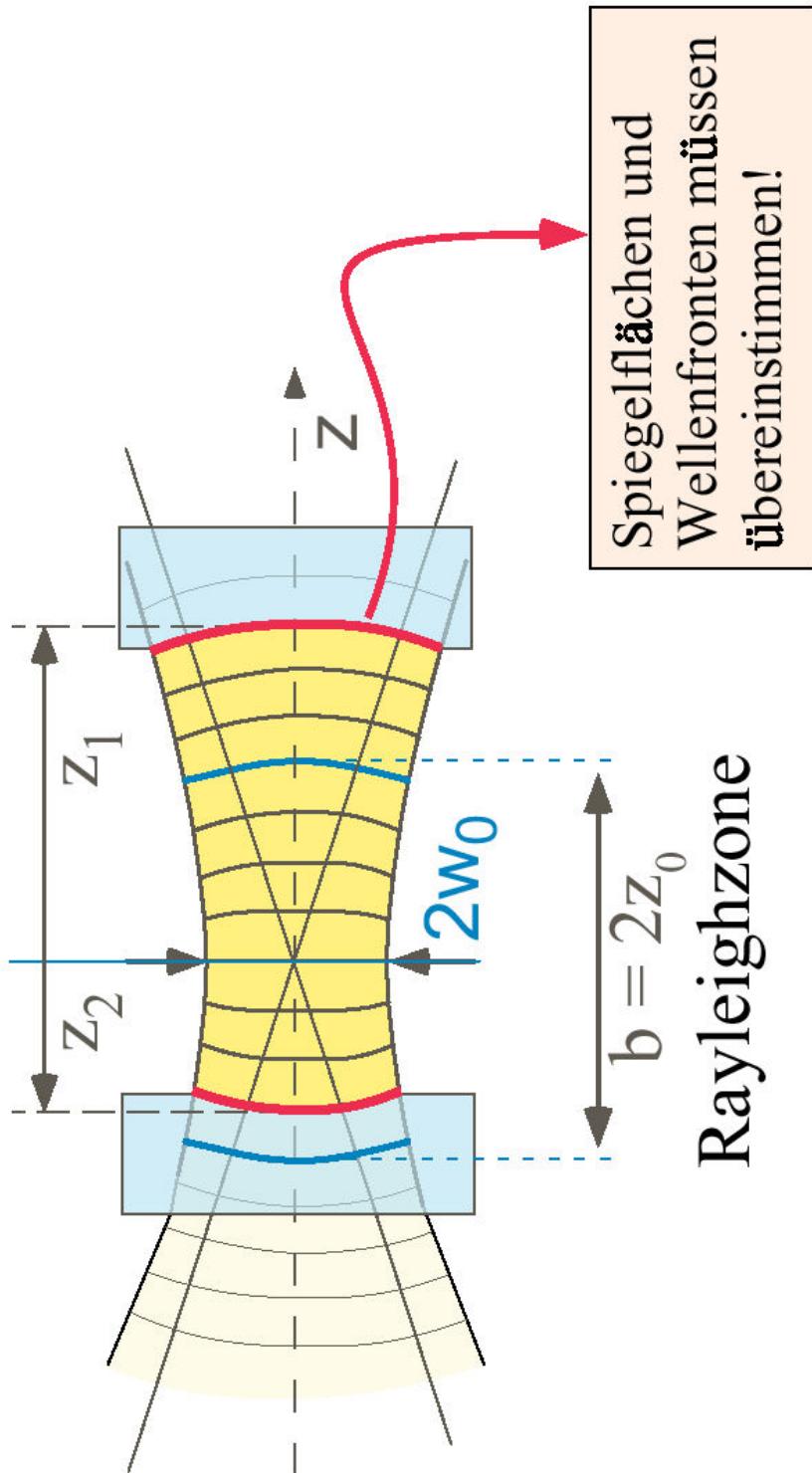
Äquivalente Resonatoren

- bisher: nur konfokaler Resonator
- aber: jeder Resonator mit sphärischen Spiegeln kann in die Phasenflächen des konfokalen Resonators eingebettet werden.



Äquivalente Resonatoren

- Die Spiegel müssen bei $z = z_1$ und $z = z_2$ dieselben Krümmungsradien haben. Dann ändert sich die Feldverteilung nicht.



Solche Resonatoren nennt man äquivalent.

Modenantartung (konfokal)

Der konfokale Resonator hat eine *Modenantartung*. Das heißt, das verschiedene Moden bei gleicher Resonanzfrequenz stabil sind.

Betrachten wir dazu die transversalen Moden mit $q = q_1$ und $m + n = 2q_2$

$$q_1 + \frac{1}{2}(1 + 2q_2) = q_1 + \frac{1}{2} + q_2$$

Diese fallen mit den longitudinalen Moden mit $q = q_1 + q_2$ und $m + n = 0$ zusammen.

$$(q_1 + q_2) + \frac{1}{2}(1 + 0) = q_1 + q_2 + \frac{1}{2}$$

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L} \left[q + \frac{1}{2}(m + n + 1) \right]$$

(Resonanzfrequenzen)

Aufhebung der Modenentartung (konfokal)

Weicht der Spiegelabstand L etwas vom Krümmungsradius R der Spiegel ab, so wird diese Modenentartung wieder aufgehoben.
(Der Faktor $F(g_1, g_2)$ weicht von $1/2$ ab).



Abbildung 9: Spektrum nahezu konfokaler Resonatoren